MATHÉMATIQUES 1

Corrigé par Taoufiki said

EXERCICE

1.1. Posons $f(u) = \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$, pour $u > 0$.
On a

$$f(u) \sim \frac{1}{\sqrt{u}} \text{ lorsque } u \to 0 \quad \text{et} \quad f(u) = o(e^{-u}) \text{ lorsque } u \to +\infty$$

comme $\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}}$ et $\int_1^{+\infty} e^{-u}du$ convergent alors, $\int_0^{+\infty} f(u)du$ converge, puis f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

1.2. Soit $x > 0$. On a $\sqrt{n}e^{-nx} = o(e^{\frac{-nx}{2}})$ et $\sum\limits_{n\geq 1} e^{\frac{-nx}{2}}$ est une série géométrique convergente (car $|e^{\frac{-x}{2}}| < 1$) donc la série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \sqrt{n}e^{-nx}$ est convergente.

1.3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{z^n}{\sqrt{n}}} \right| = |z|\sqrt{\frac{n}{n+1}} \to |z| \text{ lorsque } n \to +\infty$$

Par la règle de D'Alembert, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^n}{\sqrt{n}}$ converge si et seulement si $|z| < 1$, par suite, le rayon de convergence est 1.

1.4.1. La fonction ψ_1 est la somme d'une série entière d'intervalle de convergence $]-1, 1[$, donc elle est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$ avec

$$\forall x \in]-1, 1[\ ,\ \psi_1'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}x^{n-1}$$

Par composition, la fonction ψ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ car
$\forall x > 0\ ,\ e^{-x} \in]0, 1[\subseteq]-1, 1[$, avec

$$\forall x > 0\ ,\ \psi'(x) = -e^{-x}\psi_1'(e^{-x}) = -e^{-x}\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-(n-1)x} = -\varphi(x)$$

1.4.2. On a $\varphi = -\psi'$ et ψ' est classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ (car ψ l'est), d'où φ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.
1.5.1. Soient $x > 0$ et $a \geq 0$. Par le changement de variable $u = xt$, on a

$$\int_a^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_{ax}^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} < +\infty$$

d'où la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt$.
La fonction $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}$ est clairement décroissante (il suffit d'utiliser la définition), donc pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall t \in [k-1,k]\ ,\ \frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}} \leq \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} \quad \text{et} \quad \forall t \in [k,k+1]\ ,\ \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} \leq \frac{e^{-xk}}{\sqrt{k}}$$

Prenons $N \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout $k = 1,...,N$, on a

$$\frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt \quad \text{et} \quad \int_k^{k+1}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt \leq \frac{e^{-xk}}{\sqrt{k}}$$

En sommant, on obtient

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}} \leq \int_0^N \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt \quad \text{et} \quad \int_1^{N+1}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt \leq \sum_{k=1}^{N}\frac{e^{-xk}}{\sqrt{k}}$$

Le passage à la limite dans les inégalités précédentes, lorsque $N \to +\infty$, nous donne

$$\int_1^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt \leq \psi(x) \leq \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt.$$

1.5.2. Toujours par le changement de variable $u = xt$, on obtient

$$\int_1^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt = \int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{xu}}du \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}}dt = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{xu}}du$$

En remplaçant dans la double inégalité précédente, on obtient le résultat cherché.
1.5.3. On a :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du \leq \frac{\psi(x)\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du = 1$$

et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du = 1$, donc par théorème de gendarmes, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\psi(x)\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} = 1$, d'où l'équivalence cherchée.
1.6. On a :

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du \leq \psi(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du = \sqrt{\frac{\pi}{x}}$$

comme $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du=\sqrt{\pi}-\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du=0$, donc par théorème de gendarmes, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\psi(x)=0$$

1.7.1. On a $\sqrt{n}\leq\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{2}\leq\sqrt{n+1}$, donc

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n+1}\right)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}\right) &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &\leq 0\end{aligned}$$

La suite est donc décroissante.
Pour $k=1,...,n$, on a $\forall t\in[k,k+1]$, $\frac{1}{\sqrt{k}}\geq\frac{1}{\sqrt{t}}$ donc
$\frac{1}{\sqrt{k}}\geq\int_k^{k+1}\frac{dt}{\sqrt{t}}=[2\sqrt{t}]_k^{k+1}=2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$, en sommant, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\geq 2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=2(\sqrt{n+1}-1)\geq 2\sqrt{n}-2$$

La suite est décroissante et minorée par -2, donc elle converge.
1.7.2. Soit $x>0$. La suite de la question précédente est convergente donc elle est majorée de sorte qu'il existe $M\in\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\leq M+2\sqrt{n}$$

Comme $\sum_{n\geq1}\sqrt{n}e^{-nx}$ et $\sum_{n\geq1}e^{-nx}$ convergent, alors, par linéarité, $\sum_{n\geq1}(M+2\sqrt{n})e^{-nx}$ converge, puis, par comparaison $\sum_{n\geq1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)e^{-nx}$ converge.

1.7.3 Les séries $\sum_{n\geq1}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $\sum_{n\geq1}e^{-nx}$ sont absolument convergentes donc leur produit de cauchy l'est aussi et sa somme est égale au produit des sommes, on écrit

$$\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}\right)}_{=\psi(x)}\underbrace{\left(\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-nx}\right)}_{=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}=\frac{1}{e^x-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}c_n$$

où $\quad c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}} e^{-(n-k)x} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{-nx}$, d'où l'égalité cherchée.

1.7.4 Comme dans **1.7.1.** on montre que

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{n+1} - 2$$

On en déduit que

$$2\sqrt{n} - 2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$$

par sommation, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2\sqrt{n} - 2\right) e^{-nx} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \right) e^{-nx} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(2\sqrt{n} - 1\right) e^{-nx}$$

par linéarité, définition de φ, sommation d'une série géométrique et **1.7.3**, on obtient

$$2\varphi(x) - \frac{2}{e^x - 1} \leq \frac{\psi(x)}{e^x - 1} \leq 2\varphi(x) - \frac{1}{e^x - 1}$$

On en déduit que

$$\psi(x)\sqrt{\frac{x}{\pi}}.\frac{x}{e^x - 1} + \sqrt{\frac{x}{\pi}}.\frac{x}{e^x - 1} \leq \frac{2\varphi(x)x^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \leq \psi(x)\sqrt{\frac{x}{\pi}}.\frac{x}{e^x - 1} + 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.\frac{x}{e^x - 1}$$

Les fonctions encadrantes ont une limite commune qui vaut 1 lorsque $x \to 0^+$, le théorème de gendarmes permet de déduire l'équivalence cherchée.

PROBLÈME

2.1.1. Par régle de D'Alembert, la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ est convergente, donc son terme général tend vers 0 (par divergence grossière).

2.1.2. On pose $x_n = \frac{\lambda^n}{n!}$. On a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\lambda}{n+1} = 0$.

donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ (d'après **2.1.1.**).

2.2.1. 0 et 1 sont des racines de U_n d'ordre n, donc,

$$\forall k = 0, ..., n-1 \ , \ U_n^k(0) = U_n^k(1) = 0$$

2.2.2. Par formule du binôme de Newton, on a

$$U_n(x) = \frac{x^n}{n!}\sum_{i=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array}\right)(-1)^i x^i = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!(n-i)!}x^{n+i}$$

Par la formule de Taylor, on a

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{2n}\frac{U^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Par unicité de cette formule, on obtient

$$\forall k = 0, ..., n \ , \ \frac{U^{(n+k)}(0)}{(n+k)!} = \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}$$

D'où

$$\forall k = 0, ..., n \ , \ U^{(n+k)}(0) = \frac{(-1)^k(n+k)!}{k!(n-k)!} = (-1)^k A_{n+k}^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \in \mathbb{Z}$$

On observe que $\forall x \in \mathbb{R} \ , \ U_n(1-x) = U_n(x)$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \forall k \in \mathbb{N} \ , \ U_n^{(k)}(x) = (-1)^k U_n^{(k)}(1-x)$$

pour $x = 1$, on aura

$$\forall k = 0, ..., n \ , \ U^{(n+k)}(1) = (-1)^{n+k} U_n^{(n+k)}(0) = (-1)^n A_{n+k}^k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) \in \mathbb{Z}$$

2.3. Pour $p = 1$, ce n'est que la formule d'intégration par parties. Supposons la propriété valable jusqu'au rang p et montrons la pour $p+1$. Soient f et g deux fonctions de classe C^{p+1} sur $[a, b]$. On a f' et g deux fonctions de classe C^p sur $[a, b]$, donc par hypothèse de récurrence, on note $I = \int_a^b f^{(p+1)}(t)g(t)dt$. On a

$$\begin{aligned}
I &= \int_a^b (f')^{(p)}(t)g(t)dt \\
&= (-1)^p \int_a^b f'(t)g^{(p)}(t)dt + \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\left((f')^{(p-k)}(b)g^{(k-1)}(b) - (f')^{(p-k)}(a)g^{(k-1)}(a)\right) \\
&= (-1)^p \left(f(b)g^{(p)}(b) - f(a)g^{(p)}(a) - \int_a^b f(t)(g^{(p)})'(t)dt\right) \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}\left(f^{(p+1-k)}(b)g^{(k-1)}(b) - f^{(p+1-k)}(a)g^{(k-1)}(a)\right) \\
&= (-1)^{p+1}\int_a^b f(t)g^{(p+1)}(t)dt + \sum_{k=1}^{p+1}(-1)^{k+1}\left(f^{(p+1-k)}(b)g^{(k-1)}(b) - f^{(p+1-k)}(a)g^{(k-1)}(a)\right)
\end{aligned}$$

2.4.1. On a : $a \in a\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$, donc $\exists (k,k') \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a = k + k'\omega$. D'autre part $\omega = 0 + 1.\omega \in \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$, donc $\exists k'' \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega = k''a$. On a donc $a = k + k'\omega = k + k'k''a$ puis $a(1 - k'k'') = k$.
Si $1 - k'k'' \neq 0$ alors $\omega = k''a = \frac{kk''}{1-k'k''} \in \mathbb{Q}$
Si $1 - k'k'' = 0$ alors $k', k'' \in \{\pm 1\}$ et $k = 0$ puis $a = \pm\omega$.
Si $a = \omega$, on a $1 + \omega \in \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$ donc $\exists m \in \mathbb{Z}$, $1 + \omega = ma = m\omega$ puis $\omega(m-1) = 1$. On a $m \neq 1$ car sinon, on aura $1 = 0$ donc $\omega = \frac{1}{m-1} \in \mathbb{Q}$.
Si $a = -\omega$, on a $1 - \omega \in \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$ donc $\exists m' \in \mathbb{Z}$, $1 - \omega = m'a = -m'\omega$ puis $\omega(1 - m') = 1$. On a $m' \neq 1$ car sinon, on aura $1 = 0$ donc $\omega = \frac{1}{1-m'} \in \mathbb{Q}$.
2.4.2.i. Pour tout $(k,k') \in \mathbb{Z}$, on a

$$k + k'\omega = k + k'.\frac{p}{q} = \frac{kq + k'p}{q} = (kq + k'p)a \in a\mathbb{Z}$$

D'où $\quad \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$.
2.4.2.ii. Un résultat de l'arithmétique affirme que les deux entiers p et q sont premiers entre eux si et seulement s'il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $up + vq = 1$, c'est ce qu'on admet selon l'indication.
Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$ak = \frac{k.1}{q} = \frac{k(up + vq)}{q} = kv + ku\omega \in \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$$

D'où $\quad a\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$.
On en déduit que

$$\omega \in \mathbb{Q} \quad \Leftrightarrow \quad \exists a > 0 \ , \ a\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$$

2.5.1. Par définition de la limite, on a

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}^* \ , \ \forall n \geq N_\varepsilon \ : \ |k_n| \leq \varepsilon$$

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\forall n \geq N \ : \ |k_n| \leq \frac{1}{2}$
Les k_n sont des entiers et le seul entier de valeur absolue inférieur à $\frac{1}{2}$ est 0, d'où $k_n = 0$, pour tout $n \geq N$.
2.5.2. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\omega \in \mathbb{Q}$. Il existe alors $a > 0$ tel que $a\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k_n \neq \mathbb{Z}^*$ tel que

$$k_n a = p_n\omega - q_n \qquad (\text{ car } 0 \neq p_n\omega - q_n \in \mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z} = a\mathbb{Z})$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega p_n - q_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a}(\omega p_n - q_n) = 0$, par suite, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N$, $k_n = 0$, ce qui est absurde.
3.1.1. On a

$$\begin{cases} u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \\ v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0 \end{cases}$$

et $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n.n!} = 0$, d'où (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
3.1.2. La suite (u_n) est strictement croissante donc $e = \lim_{n\to+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$ donc $u_n \leq e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0} = e$ alors, pour tout $n > n_0$, $u_n > u_{n_0} = e$ ce qui est absurde, d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ u_n < e$$

de même façon, on vérifie que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ v_n > e$$

3.2. On a

$$n!u_n = n!\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=1}^{n} A_n^{n-k} \in \mathbb{N}$$

D'autre part, on a

$$n!u_n < n!e < v_n n! = u_n n! + \frac{1}{n}$$

donc

$$0 < n!e - n!u_n < \frac{1}{n}$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n!e - n!u_n \neq 0$ et $\lim_{n\to+\infty} n!e - n!u_n = 0$
On pose $p_n = n! \in \mathbb{Z}$, $q_n = n!u_n \in \mathbb{Z}$ et $\omega = e$. En appliquant **2.5.2**, on obtient que $e \notin \mathbb{Q}$.
3.3. On a

$$\deg(U_n) = 2n \quad , \quad \deg(L_n) = \deg(U_n) - n = n$$

3.4.1. En appliquant la formule **(1)**, on écrit

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \int_0^1 U_n^{(n)}(t)e^{xt}dt \\ &= (-1)^n \int_0^1 U_n(t)x^n e^{xt}dt + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(U_n^{(n-k)}(1)1^{(k-1)}e^x - U_n^{(n-k)}(0)0^{(k-1)}e^0\right) \end{aligned}$$

Par **2.2.1.** $U_n^{(n-k)}(1) = U_n^{(n-k)}(0) = 0$ pour tout $k = 1, ..., n$ d'où

$$T_n(x) = (-1)^n x^n \int_0^1 U_n(t)e^{xt}dt$$

3.4.2. Si $T_n(x) = 0$, alors $\int_0^1 U_n(t)e^{xt}dt = 0$ car $x \neq 0$. La fonction $t \mapsto U_n(t)e^{xt}$ est continue et positive sur $[0,1]$, par positivité stricte, elle est nulle sur $[0,1]$, ce

qui est absurde. D'où $T_n(x) \neq 0$.
3.5.1 On a $\forall t \in [0,1]$, $e^{xt} \leq \max(e^{x.0}, e^{x.1}) = \max(1, e^x)$ car exp est croissante.
On a $\frac{d}{dt}t(1-t) = 1 - 2t \geq 0$ si et seulement si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{d}{dt}t(1-t) \leq 0$ si et seulement si $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$
$t \mapsto t(1-t)$ est croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$, donc
$\forall t \in [0,1]$, $t(1-t) \leq \frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, d'où

$$\forall t \in [0,1] \ , \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ [t(1-t)]^n \leq \frac{1}{4^n}$$

On en déduit que

$$|x^n T_n(x)| \leq \frac{|x^{2n}|}{n!} \int_0^1 |e^{xt}[t(1-t)]^n| dt \leq x^{2n} \frac{max(1, e^x)}{4^n n!}$$

3.5.2 On pose $\lambda = \frac{x^2}{4}$. D'après **2.1.2**, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\lambda^n}{n!} = 0$, donc, par théorème de gendarmes et l'inégalité de **3.5.1**, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n T_n(x) = 0$.
3.6.1 On a $\psi_x^{(2n+1)}(t) = x^{2n+1} e^{xt}$ et $T_n(x) = (-1)^n x^n \int_0^1 U_n(t) e^{xt} dt$, d'où

$$x^{n+1} T_n(x) = (-1)^n x^{2n+1} \int_0^1 U_n(t) e^{xt} dt = (-1)^n \int_0^1 \psi_x^{(2n+1)}(t) U_n(t) dt$$

3.6.2 Par la formule **(1)**, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \psi_x^{(2n+1)}(t) U_n(t) dt &= (-1)^{2n+1} \int_0^1 \psi_x(t) \underbrace{U_n^{(2n+1)}(t)}_{=0 \text{ car } \deg(U_n)=2n} dt \\
&\quad + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \left(\underbrace{\psi_x^{(2n+1-k)}(1)}_{=x^{2n+1-k}e^x} \underbrace{U_n^{(k-1)}(1)}_{=0 \text{ si } k \leq n} - \underbrace{\psi_x^{(2n+1-k)}(0)}_{=x^{2n+1-k}} \underbrace{U_n^{(k-1)}(0)}_{=0 \text{ si } k \leq n} \right) \\
&= e^x \sum_{k=n+1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \underbrace{U_n^{(k-1)}(1)}_{\in \mathbb{Z}} x^{2n+1-k} - \sum_{k=n+1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \underbrace{U_n^{(k-1)}(0)}_{\in \mathbb{Z}} x^{2n+1-k}
\end{aligned}$$

On pose $Q_n(x) = (-1)^n \sum\limits_{k=n+1}^{2n+1} (-1)^{k+1} U_n^{(k-1)}(1) X^{2n+1-k} \in \mathbb{Z}[X]$

et $P_n(x) = (-1)^n \sum\limits_{k=n+1}^{2n+1} (-1)^{k+1} U_n^{(k-1)}(0) X^{2n+1-k} \in \mathbb{Z}[X]$.
On a $\deg(P_n) = n$ car $U_n^{(n)}(0) \neq 0$ et $\deg(Q_n) = n$ car $U_n^{(n)}(1) \neq 0$ $(0, 1$ sont de multiplicité $n)$. Et on a bien

$$x^{n+1} T_n(x) = Q_n(x) e^x - P_n(x)$$

3.7. Soit $r \in \mathbb{Z}$. On pose $p_n = Q_n(r) \in \mathbb{Z}$, $q_n = P_n(r) \in \mathbb{Z}$ et $\omega = e^r$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ p_n\omega - q_n = r^{n+1}T_n(r) \neq 0 \ \ (\mathbf{3.4.2}) \ \ \text{et} \ \ \lim_{n\to+\infty} r^{n+1}T_n(r) = 0 \ \ (\mathbf{3.5.2})$$

donc $e^r \notin \mathbb{Q}$, d'après **2.5.2**.

3.8. Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Cette fois, on pose $p_n = q^nQ_n(r) \in \mathbb{Z}$, $q_n = q^nP_n(r) \in \mathbb{Z}$ et $\omega = e^r$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ p_n\omega - q_n = q^nr^{n+1}T_n(r) \neq 0 \ \ (\mathbf{3.4.2})$$

En utilisant **3.5.1**, on obtient que

$$|q^nr^{n+1}T_n(r)| \leq \left|\frac{p}{q}\right| . \frac{\left(\frac{p^2}{4q}\right)^n}{n!} \max(1, e^r)$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} q^nr^{n+1}T_n(r) = 0$ puis $\lim_{n\to+\infty} p_n\omega - q_n = 0$, on en déduit par **2.5.2** que $e^r \notin \mathbb{Q}$.

Soit α un rationnel strictement positif et distinct de 1. On pose $x = \ln\alpha$. On a $x \in \mathbb{R}^*$. Si $x \in \mathbb{Q}^*$ alors $\alpha = e^x \notin \mathbb{Q}$, ce qui est absurde, donc x est irrationnel.